



TITLE:

# Lévy駆動型Ornstein-Uhlenbeck過程のLévy測度に対する信頼バンドの構成 (Statistical Inference and Modelling)

AUTHOR(S):

栗栖, 大輔

---

CITATION:

栗栖, 大輔. Lévy駆動型Ornstein-Uhlenbeck過程のLévy測度に対する信頼バンドの構成 (Statistical Inference and Modelling). 数理解析研究所講究録 2018, 2091: 116-124

ISSUE DATE:

2018-10

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/251639>

RIGHT:

# Lévy 駆動型 Ornstein-Uhlenbeck 過程の Lévy 測度 に対する信頼バンドの構成

栗栖大輔

東京工業大学 工学院 経営工学系

## 1 概要

本研究では複合 Poisson 過程により駆動される Ornstein-Uhlenbeck 過程 (以下 CPOU 過程という) を離散観測する状況において, 観測データから複合 Poisson 過程の Lévy 測度をノンパラメトリックに推定する問題を考える. 具体的には CPOU 過程の定常分布の特性関数の表現 (Lévy-Khinchine 表現) が自己分解可能分布になるという性質を利用して Lévy 測度のスペクトル推定量を構成し, この推定量が幾つかの正則条件の下で漸近的に線形な表現をもつことを示す. また線形化した推定量に対して複数の design point 上での多次元中心極限定理を導出する. さらに近年開発された経験過程の理論を応用し, 中間的な Gauss 近似に基づく高次元中心極限定理を導出し, その結果を用いて CPOU 過程を駆動する複合 Poisson 過程の Lévy 測度に対する信頼バンドの構成法を提案する. これらに加えて, 推定量のバンド幅の選択方法に関して視覚的な情報に基づく実用的な方法を提案する.

## 2 記号

任意の空でない集合  $T$  と  $T$  上で定義された任意の (複素数値) 関数  $f$  に対し,  $\|f\|_T = \sup_{t \in T} |f(t)|$  とする. 任意の  $a \in \mathbb{R}$  と  $b > 0$  に対して,  $[a \pm b] = [a - b, a + b]$  と書く. 任意の正数列  $a_n, b_n$  に対して,  $n$  と独立な定数  $C > 0$  が存在して任意の  $n$  に対して  $a_n \leq Cb_n$  が成り立つとき,  $a_n \lesssim b_n$  と書く. また  $a_n \lesssim b_n$  かつ  $b_n \lesssim a_n$  のとき  $a_n \sim b_n$  と書く.  $n \rightarrow \infty$  のとき  $a_n/b_n \rightarrow 0$  ならば  $a_n \ll b_n$  と書く. ベクトル  $x$  の転置を  $x^\top$  と書く. 確率変数 (ベクトル) の分布収束を  $\xrightarrow{d}$  と書く.

### 3 Lévy 測度 ( $k$ -関数) の推定

ある正の定数  $\lambda$  とドリフトをもたない増加 Lévy 過程  $J = (J_t)_{t \geq 0}$  に対して,  $J$  により駆動される Lévy 駆動型 Ornstein-Uhlenbeck (LOU) 過程  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  は以下の確率微分方程式の解として定義される:

$$dX_t = -\lambda X_t dt + dJ_{\lambda t}, \quad t \geq 0. \quad (1)$$

Lévy 過程に対する一般論は Sato (1999) や Bertoin (1996) を参照のこと. 本研究では確率微分方程式 (1) に従う確率過程を離散観測する状況において, Lévy 過程  $J$  の Lévy 測度  $\nu$  をノンパラメトリックに推定する方法を提案する. ここで, Lévy 測度とは以下を満たす  $[0, \infty)$  上の Borel 測度である:

$$\int_0^\infty (1 \wedge x^2) \nu(dx) < \infty.$$

本研究では  $X$  は定常過程であると仮定する. LOU 過程に関する定常性については, 例えば  $\int_{(2, \infty)} \log x \nu(dx) < \infty$  なら (1) は唯一の定常解を持つことが知られている (詳しくは Sato (1999) の Theorem 17.5, Corollary 17.9 を参照). またこのとき,  $X$  の定常分布  $\pi$  は自己分解可能分布になることが知られており, その特性関数は以下の形で与えられる:

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \pi(dx) = \exp \left( \int_0^\infty (e^{itx} - 1) \frac{k(x)}{x} dx \right), \quad (2)$$

ここで  $i = \sqrt{-1}$ ,  $k(x) = \nu((x, \infty))1_{[0, \infty)}$ .

特に本研究では Lévy 過程  $J$  が複合 Poisson 過程, 即ち,  $J$  が以下の形で与えられる場合を考える:

$$J_t = \sum_{j=1}^{N_t} U_j, \quad t \geq 0.$$

ただし,  $N = (N_t)_{t \geq 0}$  は強度  $\alpha > 0$  の Poisson 過程であり,  $\{U_j\}_{j \geq 1}$  共通の分布  $F$  に従う i.i.d. 確率変数列である. この場合,  $J_t$  は以下の形の特性関数をもつ:

$$\varphi_{J_t}(u) = E[e^{iuJ_t}] = \exp \left( t\alpha \int_0^\infty (e^{iux} - 1) F(dx) \right)$$

またこのとき,  $J$  の Lévy の測度は  $\nu(dx) = \alpha F(dx)$  で与えられる.  $X$  の離散観測の枠組みとして, macroscopic observation の場合を考える. 即ち, 観測頻度  $1/\Delta$  ( $\Delta > 0$ ) で

$X_\Delta, X_{2\Delta}, \dots, X_{n\Delta}$  を観測し, さらに観測頻度に関して,  $n \rightarrow \infty$  のとき  $\Delta = \Delta_n \rightarrow \infty$ ,  $\Delta_n/n \rightarrow 0$  を仮定する.

(2) の表現を利用すると  $k$ -関数に対するノンパラメトリックな推定量 (スペクトル推定量) が得られる. 具体的にはまず  $k$ -関数を対称化した  $k_\#$ -関数を考える:

$$k_\#(x) = \begin{cases} k(x) & \text{if } x \geq 0, \\ k(-x) & \text{if } x < 0. \end{cases}$$

このとき,

$$\begin{aligned} \varphi_\#(t) &:= \frac{\varphi(t)}{\varphi(-t)} = \exp \left( \int_{\mathbb{R}} (e^{itx} - 1) \frac{k_\#(x)}{x} dx \right), \\ \varphi'_\#(t) &= \frac{\varphi'(t)\varphi(-t) + \varphi(t)\varphi'(-t)}{\varphi^2(-t)} = \frac{1}{\varphi(-t)} \varphi'(t) - \left( \frac{1}{\varphi(-t)} \right)' \varphi(t) = i \left( \int_{\mathbb{R}} e^{itx} k_\#(x) dx \right) \varphi_\#(t) \end{aligned}$$

となることがわかるので, この関係から

$$k_\#(x) = \frac{-i}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \frac{\varphi'_\#(t)}{\varphi_\#(t)} dt$$

という関係式が導ける. この等式を利用すると推定量が定義できる.  $\theta_n$  を  $n \rightarrow \infty$  のとき  $\theta_n \rightarrow \infty$  となる定数列 (特に本研究では  $\theta_n \sim n^{1/2}(\log n)^{-3}$ ) とし,  $W: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  を  $\int_{\mathbb{R}} W(x)dx = 1$  を満たす kernel 関数, またその Fourier 変換  $\varphi_W$  が  $[-1, 1]$  に台をもつとする (i.e.,  $\varphi_W(u) = 0$  for all  $|u| > 1$ ). このとき,

$$\widehat{\varphi}(u) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e^{iuX_{j\Delta}}, \quad \widehat{\varphi}'_{\theta_n}(u) = \frac{i}{n} \sum_{j=1}^n X_{j\Delta} e^{iuX_{j\Delta}} 1\{|X_{j\Delta}| \leq \theta_n\}.$$

とすると,  $k(x)$  ( $x > 0$ ) のスペクトル推定量は以下で定義される:

$$\widehat{k}_\#(x) = \frac{-i}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \frac{\widehat{\varphi}'_\#(t)}{\widehat{\varphi}_\#(t)} \varphi_W(th) dt.$$

ここで  $h = h_n$  は  $n \rightarrow \infty$  で  $h_n \rightarrow 0$  となるバンド幅であり,  $\widehat{\varphi}_\#(t)$ ,  $\widehat{\varphi}'_\#(t)$  はそれぞれ

$$\widehat{\varphi}_\#(t) = \frac{\widehat{\varphi}(t)}{\widehat{\varphi}(-t)}, \quad \widehat{\varphi}'_\#(t) = \frac{1}{\widehat{\varphi}(-t)} \widehat{\varphi}'_{\theta_n}(t) + \frac{\widehat{\varphi}'_{\theta_n}(-t)}{\widehat{\varphi}^2(-t)} \widehat{\varphi}(t).$$

**Remark 1.**  $\widehat{\varphi}'_{\theta_n}$  の定義で打ち切り関数を使っているのは有界な *mixing process* に対する指数型不等式を利用するためである. これにより特性関数 (の微分) の推定量の一般的な推定レートが導出できる. この結果は推定量の漸近線形表現の導出や推定量の分散を推定する際に重要になる. 詳しくは Belomestny (2011) の Proposition 7.4 を参照のこと.

**Remark 2.**  $\widehat{k}_{\#}$  は実数値をとる. 実際, 複素数  $a$  に対し,  $\bar{a}$  をその複素共役とすると  $\overline{\widehat{\varphi}'_{\#}(t)} = -\widehat{\varphi}'_{\#}(-t)$  かつ  $\overline{\widehat{\varphi}_{\#}(t)} = \widehat{\varphi}_{\#}(-t)$  なので, 変数変換により以下のことがわかる.

$$\overline{\widehat{k}_{\#}(x)} = \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \frac{\overline{\widehat{\varphi}'_{\#}(t)}}{\widehat{\varphi}_{\#}(t)} \overline{\varphi_W(th)} dt = \frac{-i}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \frac{\widehat{\varphi}'_{\#}(-t)}{\widehat{\varphi}_{\#}(-t)} \varphi_W(-th) dt = \widehat{k}_{\#}(x).$$

## 4 多次元中心極限定理

$\widehat{k}_{\#}$  に対する多次元中心極限定理を述べるにあたり以下を仮定する:

Assumption 1:

- (i) ある  $\epsilon > 0$  が存在して  $\int_0^{\infty} (1 \vee |x|^{2+\epsilon}) k(x) dx < \infty$ .
- (ii)  $k(0) = \nu((0, \infty)) = \alpha$  かつ  $2 < \alpha < \infty$ .
- (iii)  $r > 1/2$  とする.  $p$  を  $p < r \leq p+1$  を満たす整数とする. 関数  $k_{\#}$  は  $p$  階微分可能で,  $k_{\#}^{(p)}$  は  $(r-p)$ -Hölder 連続. 即ち,

$$\sup_{x, y \in \mathbb{R}, x \neq y} \frac{|k_{\#}^{(p)}(x) - k_{\#}^{(p)}(y)|}{|x - y|^{r-p}} < \infty.$$

- (iv)  $|\varphi_k(u)| \lesssim (1 + |u|)^{-1}$  かつ  $|\varphi'_k(u)| \vee |\varphi''_k(u)| \lesssim (1 + |u|)^{-2}$ . ここで  $\varphi_k (= \varphi'/\varphi)$  は  $k$  の Fourier 変換.

- (v)  $W : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  は以下を満たす可積分関数:

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}} W(x) dx = 1, \int_{\mathbb{R}} |x|^{p+1} |W(x)| dx < \infty, \\ \int_{\mathbb{R}} x^{\ell} W(x) dx = 0, \ell = 1, \dots, p, \\ \varphi_W(u) = 0, \forall |u| > 1, \\ \varphi_W \text{ は } 3 \text{ 階連続微分可能.} \end{cases}$$

ここで,  $\varphi_W$  は  $W$  の Fourier 変換.

- (vi)  $\Delta = \Delta_n \gtrsim \log n$ ,  $n/\Delta \rightarrow \infty$ , かつある  $\delta \in (0, 1/12)$  に対して  $n \rightarrow \infty$  のとき,

$$\left( \frac{(\log n)^5}{n} \right)^{1/(2+2\alpha-\delta)} \ll h \ll \left( \frac{1}{n \log n} \right)^{1/(1+2r+2\alpha-\delta)}.$$

**Remark 3.** 条件 (i), (ii) より, 定常分布  $\pi$  は有界な Lebesgue 密度をもち (記号の濫用だが以下密度も  $\pi$  と書く),  $\|\pi\|_{\mathbb{R}} \lesssim 1$ ,  $\int_{\mathbb{R}} |x| \pi(dx) < \infty$  を満たす. この場合, 定常な Lévy 駆動型 Ornstein-Uhlenbeck 過程 (1) は exponentially  $\beta$ -mixing になることが知

られている (詳しくは Masuda (2004) の Theorem 4.3). 即ち, 定常過程  $X$  の  $\beta$ -mixing coefficients

$$\beta_X(t) = \int_{\mathbb{R}} \|P_t(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{TV} \pi(dx), \quad t > 0$$

(この表現は Davydov (1973) の Proposition 1 による) はある  $\beta_1 > 0$  が存在して  $\beta_X(t) = O(e^{-\beta_1 t})$  を満たす. ここで,  $P_t(x, \cdot)$  は Lévy 駆動型 OU 過程 (1) の遷移確率であり,  $\|\cdot\|_{TV}$  は total variation ノルムである.

Assumption 1 のもとで  $\widehat{k}_{\#}(x) - k_{\#}(x)$  は以下のように漸近的に線形表現をもつ:

$$\frac{-i}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \left( \frac{\widehat{\varphi}'_{\theta_n}(t) - \varphi'_{\theta_n}(t)}{\varphi(t)} \right) \varphi_W(th) dt. \quad (3)$$

ここで  $\varphi'_{\theta_n}(t) = E[\widehat{\varphi}'_{\theta_n}(t)]$ . 変数変換により, (3) は以下のように書き換えられる:

$$Z_n(x) = \frac{1}{nh} \sum_{j=1}^n \left\{ X_{j\Delta} 1\{|X_{j\Delta}| \leq \theta_n\} K_n \left( \frac{x - X_{j\Delta}}{h} \right) - E \left[ X_1 1\{|X_1| \leq \theta_n\} K_n \left( \frac{x - X_1}{h} \right) \right] \right\}. \quad (4)$$

ここで,

$$K_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \frac{\varphi_W(t)}{\varphi(t/h)} dt.$$

$k(x)$  に対する各点での信頼区間を構成するため,  $\sqrt{nh}Z_n(x)$  の分散  $\sigma_n^2(x)$  を以下で推定する:

$$\begin{aligned} \widehat{\sigma}_n^2(x) &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left\{ X_{j\Delta} 1\{|X_{j\Delta}| \leq \theta_n\} \widehat{K}_n \left( \frac{x - X_{j\Delta}}{h} \right) \right\}^2 \\ &\quad - \left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_{j\Delta} 1\{|X_{j\Delta}| \leq \theta_n\} \widehat{K}_n \left( \frac{x - X_{j\Delta}}{h} \right) \right\}^2. \end{aligned} \quad (5)$$

ここで,

$$\widehat{K}_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \frac{\varphi_W(t)}{\widehat{\varphi}(t/h)} dt.$$

以上の準備の下で次の多次元中心極限定理が成り立つ.

**Theorem 1.** Assumption 1 の下で, 任意の  $0 < x_1 < \dots < x_N < \infty$  に対して以下が成り立つ:

$$\sqrt{nh} \left( \frac{\widehat{k}_{\#}(x_1) - k_{\#}(x_1)}{\widehat{\sigma}(x_1)}, \dots, \frac{\widehat{k}_{\#}(x_N) - k_{\#}(x_N)}{\widehat{\sigma}(x_N)} \right)^{\top} \xrightarrow{d} N(0, I_N).$$



ここで,  $I_N$  は  $N \times N$  の単位行列で  $\hat{\sigma}_n(x) = \sqrt{\hat{\sigma}_n^2(x)}$ .

証明は Kurisu (2018) を参照のこと.

## 5 高次元中心極限定理

この節では前節の結果を design point の数  $N$  がサンプル数  $n$  の増加に従って発散する場合 (高次元の場合) に拡張する. 推定量の漸近線形表現 (4) に対していくつか記号を定義する.  $1 \leq j \leq n, 1 \leq \ell \leq N$  に対して,

$$Z_{n,j}(x_\ell) = X_{j\Delta} 1\{|X_{j\Delta}| \leq \theta_n\} K_n \left( \frac{x_\ell - X_{j\Delta}}{h} \right),$$

$$W_n(x_\ell) = \frac{1}{\sigma_n(x_\ell)\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n (Z_{n,j}(x_\ell) - E[Z_{n,1}(x_\ell)]) = \frac{\sqrt{n}h}{\sigma_n(x_\ell)} Z_n(x_\ell)$$

とする. また  $I \subset (0, \infty)$  を有限な Lebesgue 測度  $|I|$  をもつ区間, また  $0 < x_1 < \dots < x_N < \infty, x_j \in I, \ell = 1, \dots, N$  とする. このとき,

$$\min_{1 \leq k \neq \ell \leq N} |x_k - x_\ell| \gg h^{1-2\delta} \quad (6)$$

を仮定する. このとき  $N \ll h^{2\delta-1}$  であり, これは  $n \rightarrow \infty$  のときに design point の数  $N$  に関して  $N \rightarrow \infty$  となってもよいことを意味する. 推定量に対する高次元中心極限を述べる前にいくつか結果を用意する.

**Lemma 1.** *Assumption 1* と条件 (6) の下で以下が成り立つ:

$$\max_{1 \leq \ell \leq N} \left| \frac{\hat{\sigma}_n^2(x_\ell)}{\sigma_n^2(x_\ell)} - 1 \right| = o_P((\log n)^{-1}).$$

**Remark 4.** 任意の  $0 < x < \infty$  に対して

$$\left| \frac{\hat{\sigma}_n^2(x)}{\sigma_n^2(x)} - 1 \right| = \left| \frac{\hat{\sigma}_n(x)}{\sigma_n(x)} - 1 \right| \left| \frac{\hat{\sigma}_n(x)}{\sigma_n(x)} + 1 \right| \geq \left| \frac{\hat{\sigma}_n(x)}{\sigma_n(x)} - 1 \right|$$

であるから, Lemma 1 より

$$\max_{1 \leq \ell \leq N} \left| \frac{\hat{\sigma}_n(x_\ell)}{\sigma_n(x_\ell)} - 1 \right| = o_P((\log n)^{-1}).$$

**Theorem 2.** *Assumption 1* と条件 (6) のもとで以下が成り立つ:

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \left| P \left( \max_{1 \leq \ell \leq N} |W_n(x_\ell)| \leq t \right) - P \left( \max_{1 \leq \ell \leq N} |Y_\ell| \leq t \right) \right| \rightarrow 0, \text{ as } n \rightarrow \infty.$$

ここで,  $Y = (Y_1, \dots, Y_N)^\top$  は  $N$  次元の標準正規確率ベクトル.

**Remark 5.** Theorem 2 は 2 つのステップで証明できる. 第 1 ステップとして,  $\max_{1 \leq \ell \leq N} |W_n(x_\ell)|$  の分布を  $\max_{1 \leq \ell \leq N} |\check{Y}_{n,\ell}|$  の分布で近似する (中間的な Gauss 近似). ここで,  $\check{Y}_n = (\check{Y}_{n,1}, \dots, \check{Y}_{n,N})^T$  は平均 0 の正規確率ベクトルで共分散行列  $E[\check{Y}_n \check{Y}_n^\top] = q^{-1} E[W_{I_1} W_{I_1}^\top]$  をもつ. ここで,  $q = q_n$  は  $q_n \rightarrow \infty$ ,  $q_n = o(n)$  を満たす整数列であり,

$$W_{I_1} = \left( \sum_{k=1}^q \left( \frac{Z_{n,k}(x_1) - E[Z_{n,1}(x_1)]}{\sigma_n(x_1)} \right), \dots, \sum_{k=1}^q \left( \frac{Z_{n,k}(x_N) - E[Z_{n,1}(x_N)]}{\sigma_n(x_N)} \right) \right)^\top.$$

第 2 ステップとして,  $\max_{1 \leq \ell \leq N} |\check{Y}_{n,\ell}|$  の分布を  $\max_{1 \leq \ell \leq N} |Y_\ell|$  の分布で近似する (Gaussian comparison). このため, 2 つの正規確率ベクトル  $\check{Y}_n$  と  $Y_n$  の共分散行列  $E[\check{Y}_n \check{Y}_n^\top]$  と  $E[YY^\top] = I_N$  の比較を行い, 以下の結果を示す:

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \left| P \left( \max_{1 \leq \ell \leq N} |\check{Y}_n(x_\ell)| \leq t \right) - P \left( \max_{1 \leq \ell \leq N} |Y_\ell| \leq t \right) \right| \rightarrow 0, \text{ as } n \rightarrow \infty.$$

極値理論でよく知られた結果から, i.i.d. 正規確率変数  $Y_\ell$ ,  $\ell = 1, \dots, N$  に対して  $\max_{1 \leq \ell \leq N} |Y_\ell| = O_P(\sqrt{\log N})$  が成り立つので, Theorem 2 より  $\max_{1 \leq \ell \leq N} |W_n(x_\ell)| = O_P(\sqrt{\log n})$ . 実際, Assumption 1 のもとで  $\log N \lesssim \log(h^{2\delta-1}) \lesssim \log n$ . さらに Assumption 1 のもとで以下のことが示せる:

$$\max_{1 \leq \ell \leq N} \left| \frac{\sqrt{n}h(\hat{k}_\#(x_\ell) - k_\#(x_\ell))}{\sigma_n(x_\ell)} \right| = \max_{1 \leq \ell \leq N} |W_n(x_\ell)| + o_P((\log n)^{-1/2}). \quad (7)$$

よって Lemma 1 と (7) のもとで  $x = x_\ell$ ,  $\ell = 1, \dots, N$  に関して一様に

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{n}h(\hat{k}_\#(x) - k_\#(x))}{\hat{\sigma}_n(x)} &= \frac{\sigma_n(x)}{\hat{\sigma}_n(x)} \frac{\sqrt{n}h(\hat{k}_\#(x) - k_\#(x))}{\sigma_n(x)} \\ &= \{1 + o_P((\log n)^{-1})\} \{W_n(x) + o_P((\log n)^{-1/2})\} \\ &= W_n(x) + o_P((\log n)^{-1/2}). \end{aligned}$$

以上の議論から定理の主張が従う. ここまでの議論をまとめると次の結果が成り立つ.

**Theorem 3.** Assumption 1 と条件 (6) の下で以下が成り立つ:

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \left| P \left( \max_{1 \leq \ell \leq N} \left| \frac{\sqrt{n}h(\hat{k}_\#(x_\ell) - k_\#(x_\ell))}{\hat{\sigma}_n(x_\ell)} \right| \leq t \right) - P \left( \max_{1 \leq \ell \leq N} |Y_\ell| \leq t \right) \right| \rightarrow 0, \text{ as } n \rightarrow \infty.$$

ここで,  $Y = (Y_1, \dots, Y_N)^\top$  は  $N$  次元の標準正規確率ベクトル.



証明は Kurisu (2018) を参照のこと.

## 5.1 信頼バンドの構成

この節では前節までの結果を利用して  $k$ -関数に対する  $I = [a, b] \subset (0, \infty)$  上での信頼バンドの構成法を提案する.  $\xi_1, \dots, \xi_N$  を i.i.d. 標準正規確率変数とし,  $q_\tau, \tau \in (0, 1)$  を以下を満たす値とする:

$$P\left(\max_{1 \leq j \leq N} |\xi_j| > q_\tau\right) = \tau.$$

このとき,

$$\hat{C}_n(x_\ell) = \left[ \hat{k}_\#(x_\ell) \pm \frac{\hat{\sigma}_n(x_\ell)}{\sqrt{nh}} q_\tau \right], \ell = 1, \dots, N$$

は  $k_\#(x_1), \dots, k_\#(x_N)$  に対する  $100(1 - \tau)\%$  信頼バンドである. よって, Theorem 3 により  $\{\hat{C}_n(x_\ell)\}_{\ell=1}^N$  の線形補完を行うことで  $k$ -関数に対する信頼バンドが構成できる. もしサンプル数  $n$  が十分大きければ design point の数  $N$  も十分大きくとれるので, その場合ここで提案した信頼バンドは一様信頼バンドに任意の精度で近づけることができる.

## 6 バンド幅の選択

実際に confidence band を計算する際の問題として, 推定量のバンド幅をどう選べばよいかという問題がある. Lévy 測度  $k(x) = \nu((x, \infty))1_{[0, \infty)}$  の  $I$  上での一様ノルムに関する一致推定の意味での最適なバンド幅は一般に  $k_\#$  の滑らかさという未知の量に依存する. さらに confidence band を構成するためには推定量のバイアスが推定量の分散に対して漸近的に無視できる状況でなければならない. このため, ノンパラメトリックカーネル密度推定の文脈ではよく知られているように, confidence band を計算する際には一致推定のための最適なバンド幅よりもオーダーの意味で小さくバンド幅をとる必要がある. Kato and Kurisu (2017) や Kurisu (2018) では, Bissantz et al. (2007) のアイデアに基づいて以下のように推定量の実用的なバンド幅の選択法を提案している:  $\hat{k}_h$  をバンド幅  $h$  のスペクトル推定量  $\hat{k}_\#$  とする.

- (Step1) 定数  $M > 1$  と正の整数  $J$  を決め, 基準となるバンド幅  $h^P = M\Delta^{1/2}$  を設定する. この  $h^P$  をもとに実際に採用するバンド幅の候補となるもの  $h_j = jh^P/J$ ,  $j = 1, \dots, J$  を用意する.
- (Step2) 定数  $\kappa > 1$  を決め, 隣り合うバンド幅に対応する推定量どうしの離散  $L^\infty$ -distance  $\max_{1 \leq \ell \leq N} |\hat{k}_{h_j}(x_\ell) - \hat{k}_{h_{j-1}}(x_\ell)|$ ,  $j = 2, \dots, J$  を計算する.

$\kappa \times \min\{\max_{1 \leq \ell \leq N} |\hat{k}_{h_k}(x_\ell) - \hat{k}_{h_{k-1}}(x_\ell)| : k = 2, \dots, J\}$  を下回る離散  $L^\infty$ -distance に対応するバンド幅のうち, 最小のバンド幅  $h_j (j \geq 2)$  を採用する.

以上の方法による数値実験の結果が Kurisu (2018) で述べられている.

## 7 結論

本研究では複合 Poisson 駆動型 Ornstein-Uhlenbeck 過程を macroscopic observation の枠組みで離散観測する状況において, 定常分布の Lévy-Khinchine 表現に基づく Lévy 測度のノンパラメトリックな推定量を新たに提案し, 推定量に対する多次元・高次元中心極限定理を与えた. またそれらの結果を用いて Lévy 測度に対する信頼バンドの構成法と実用的な推定量のバンド幅の選択方法を提案した.

## 参考文献

- Belomestny, D. (2011). Statistical inference for time-changed Lévy processes via composite characteristic function estimation. *Ann. Statist.* **39** 2205-2242.
- Bertoin, J. (1996). *Lévy Processes*. Cambridge University Press.
- Bissantz, N., Dümbgen, L., Holzmann, H., and Munk, A. (2007). Non-parametric confidence bands in deconvolution density estimation. *J. Roy. Stat. Soc. Ser. B Stat. Methodol.* **69** 483-506.
- Davydov, Y.A. (1973). Mixing conditions for Markov chains. *Theory Probab. Appl.* **18** 312-328.
- Kato, K. and Kurisu, D. (2017). Bootstrap confidence bands for spectral estimation of Lévy densities under high-frequency observations. arXiv:1705.00586.
- Kurisu, D. (2018). Nonparametric inference on Lévy measures of Lévy-driven Ornstein-Uhlenbeck processes under discrete observations. arXiv:1803.08671.
- Masuda, H. (2004). On multidimensional Ornstein-Uhlenbeck processes driven by a general Lévy process. *Bernoulli* **10** 97-120.
- Sato, K. (1999). *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*. Cambridge University Press.